مفهوم الضغط الهيدروستاتيكي (*Hydrostatic Pressure*):

يدرس سكون الموائع (*Fluid static*)، الموائع التي تقع في سكون تام أو نسبي والتي كما مر سابقاً، تكون إجهادات القص فيها دائماً تساوي الصفر ($\tau = 0$). وبالتالي يمكن اعتبار أنه في أية نقطة من نقاط السائل الساكن توجد فقط الإجهادات العادية (*Normal Stresses*)، أي:

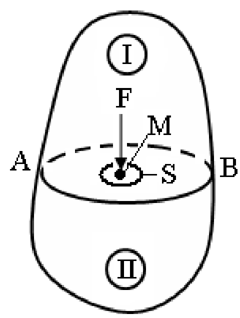
$$\sigma = \sigma_n$$

يعتبر المفهوم الأساسي في علم سكون الموائع هو مفهوم الضغط الهيدروستاتيكي (*Hydrostatic Pressure*) في نقطة ما من سائل ساكن، والذي يساوي قيمة الإجهاد في النقطة المعتبرة من هذا السائل الساكن:

$$p = |\sigma| \qquad (2.1)$$

حيث إنَّ σ الإجهادات العادية غير المتعلقة بزاوية الميل في النقطة المدروسة.

وبشكل عام يمكن توضيح مفهوم الضغط الهيدروستاتيكي على الشكل التالي:



الشكل (2.1).

ليكن الحجم المقتطع بشكل وهمي من سائل ساكن كما في الشكل (2.1)، ولتكن النقطة (M) التي تقع ضمن المستوي (AB) والذي بدوره يقسم الحجم المفترض إلى قسمين (I) و(II). وعبر السطح (AB) ستنتقل قوة الضغط من القسم (I) –

العلوي- إلى القسم (II) وجزء من هذه القوة (F) يجب أن يؤثر على السطح الصغير .(S)

تدعى القوة (F) المؤثرة على كامل السطح بقوة الضغط الهيدروستاتيكية وتعتبر قوة سطحية خارجية بالنسبة للقسم (II) وداخلية بالنسبة للحجم المؤلف من القسمين معاً. ومن جهة ثانية تقابل القوة (F) قوة أخرى مساوية لها في الشدة ومعاكسة في الاتجاه كرد فعل من القسم (II) على القسم (I)، ولذلك يجب النظر إلى القوة (F) على أنها قوة مزدوجة.

بتقسيم قيمة $|F|$ على السطح (S)، ينتج:

$$\frac{|F|}{S} = p_e \qquad (2.2)$$

حيث إنَّ p_e القيمة الوسطية لتأثير القوة (F) على واحدة السطح (S) وتدعى بالضغط الهيدروستاتيكي الوسطي.

عندما تتناهى المساحة (S) في العلاقة (2.2) إلى الصفر (شريطة أن تبقى النقطة M داخل حدود المساحة المذكورة)، فإن قيمة الضغط الهيدروستاتيكي الوسطي سوف تتناهى إلى قيمة معينة تعكس قيمة الإجهاد (σ) وبالتالي قيمة الضغط في النقطة M:

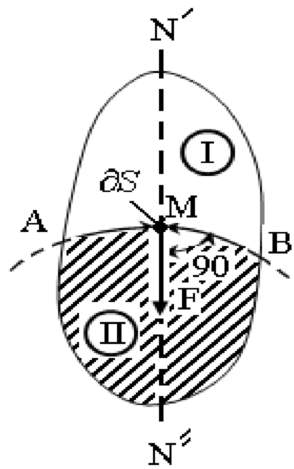
$$p = \lim_{S\to 0}\left(\frac{|F|}{S}\right) \qquad (2.3)$$

من العلاقتين (2.2) و(2.3) يتضح أن العوامل (p) و(p_e) لها واحدات قياس قوة على سطح (مثال KN/m^2 ، Kg_f/cm^2 ، T_f/m^2). مما سبق يمكن ملاحظة أن كلاً من الإجهاد الهيدروستاتيكي والضغط الهيدروستاتيكي يبدي خاصتين أساسيتين:

A. الخاصة الأولى: إن الإجهاد (σ)، الذي يعتبر نموذجه (p) يؤثر بشكل ناظمي على مساحة التأثير وتكون جهة تأثيره إلى داخل حجم السائل.

يوضح الشكل (2.2) حجماً معيناً من سائل ساكن يشطره السطح (AB) إلى قسمين (I) و(II). وكما ذكر سابقاً فإن القسم العلوي سوف يضغط بقوة معينة على السطح

(AB) للقسم السفلي ومن جهة ثانية سوف يضغط القسم السفلي وبنفس قيمة القوة ولكن باتجاه معاكس على السطح (AB) للقسم العلوي.



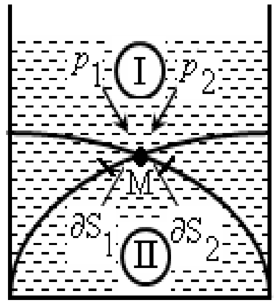
الشكل (2.2).

وبالتالي فإنه عند دراسة القسم السفلي فقط تدرس القوة المؤثرة عليه من القسم العلوي. ولو أخذنا على السطح (AB) نقطة ما ولتكن (M) وعيّنا من حولها مساحة جزئية صغيرة (∂S) من مساحة التأثير ثم رسمنا الناظم ($N'N''$) على (∂S) لأصبح لدينا جزآن من الناظم: (MN') ويدعى الناظم الخارجي و(MN'') ويدعى الناظم الداخلي.

وكما هو واضح وحسب الخاصة الأولى فإن الإجهاد (σ) يتجه دائماً بحسب الناظم الداخلي، أي إلى داخل الجسم الذي ندرس فيه الضغط.

B. الخاصة الثانية: إن الضغط الهيدروستاتيكي (p) في نقطة ما لايتعلق بزاوية ميل مساحة التأثير.

ليكن لدينا حجم معين من سائل ساكن في وعاء كما في الشكل (2.3). نعين داخل السائل النقطة (M) ونفترض وجود سطحين (1-1، 2-2) وهما اللذان يقسمان السائل إلى قسمين علوي (I) وسفلي (II).



الشكل (2.3)، الضغط الهيدروستاتيكي في النقطة (M).

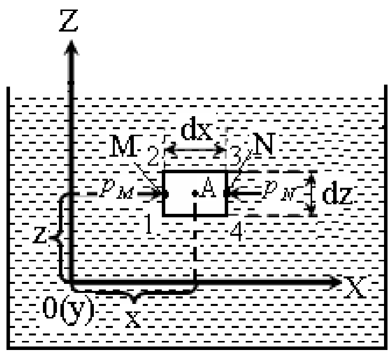
نقتطع حول النقطة (M) مساحتين صغيرتين جداً من سطوح التأثير (∂S_1 وتقع على السطح 1-1، ∂S_2 وتقع على السطح 2-2). وكما هو ملاحظ فإن لهذه السطوح زوايا ميل مختلفة فيما بينها. فلو أردنا التعبير عن ضغط جزء السائل العلوي على الجزء السفلي لرمزنا للضغط المؤثر على (∂S_1) والناظمي عليه بالرمز (p_1) وللضغط الناظمي على المساحة (∂S_2) بالرمز (p_2).

وحسب الخاصة الأولى فإن طول الأشعة المبينة على الرسم يجب أن تكون متساوية:

$$p_1 = p_2 = p$$

2.2- المعادلات التفاضلية (*Differential Equations*) للسوائل المتوازنة:

ليكن السائل الساكن في الشكل (2.4) الذي يخضع لقوة حجمية ما (وليس بالضرورة أن تكون قوة الجاذبية الأرضية). فلو رمزنا للقوة الحجمية التي تؤثر على واحدة الكتلة للسائل المدروس بالرمز (F) لاستطعنا كتابة مساقط هذه القوة على المحاور الإحداثية (ox، oy، oz) على التوالي f_x ، f_y ، f_z .



الشكل (2.4).

وفي الحالة العامة فإن الضغط (p) في نقاط مختلفة من السائل الساكن سيأخذ قيماً مختلفة أيضاً، أي:

$$p = f(x, y, z) \tag{2.4}$$

ومن أجل إيجاد علاقة بين الضغط وإحداثيات نقاط السائل وكذلك القوة (F) يختار حجماً من السائل على شكل متوازي سطوح قائم (4-3-2-1) على أن تكون أطواله متناهية في الصغر dx ، dy ، dz (حيث dy عمود على مستوي الرسم).

يعين في مركز المتوازي النقطة (A) ذات الإحداثيات (x ، y ، z) ويرمز للضغط في هذه النقطة بالرمز (p). بعد إنشاء المستقيم المار من النقطة (A) والموازي للمحور (ox) يمكن التأكيد بأن الضغط الهيدروستاتيكي في الحالة العامة سوف يتغير من نقطة إلى أخرى على الخط (MN) -المحور الأفقي للمتوازي- وحيث يعطى تغير الضغط مع تغير المسافة بالعلاقة ($\partial p/\partial x$).

باستخدام مفهوم التغير الجزئي للضغط يمكن كتابة معادلات الضغط في النقاط (M) و(N) على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} p_M &= p - \frac{1}{2} dx \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ p_N &= p + \frac{1}{2} dx \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \tag{2.5}$$

حيث يعبر الحد الثاني من المعادلات السابقة عن تغير الضغط للطول ($\frac{1}{2}dx$).

أما القوى المؤثرة على الحجم المدروس، فهي:

a) القوة الحجمية وتساوي:

$$f(dx\,dy\,dz)\cdot\rho \qquad (2.6)$$

حيث إنَّ $(dx\,dy\,dz)\cdot\rho$ هي عبارة عن كتلة السائل المحصور داخل متوازي السطوح، وبالتالي يكون مسقط هذه القوة على المحور (ox) هو:

$$f_x(dx\,dy\,dz)\cdot\rho \qquad (2.7)$$

b) القوى الخارجية: إن مساقط القوى المؤثرة على السطوح (4-1)، (3-2) معدومة بالنسبة للمحور (ox)، أما مسقط فرق القوى المؤثرة على السطحين (2-1)، (4-3) فيساوي:

$$\begin{aligned} p_M - p_N &= p_M(dz\,dy) - p_N(dz\,dy) \\ &= (p - \frac{1}{2}dx\frac{\partial p}{\partial x})\,dz\,dy - (p + \frac{1}{2}dx\frac{\partial p}{\partial x})\,dz\,dy \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz \qquad (2.8) \end{aligned}$$

وبما أن السائل ساكن فإن مجموع مساقط القوى على المحور (ox) يكون مساوياً الصفر :

$$f_x(dx\,dy\,dz)\cdot\rho - \frac{\partial p}{\partial x}dxdydz = 0 \qquad (2.9)$$

أو

$$f_x - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (2.10)$$

وبنفس الطريقة يمكن استنتاج مجموع مساقط القوى على المحاور (oy ، oz):

$$f_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$
$$f_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \qquad (2.11)$$

تسمى المعادلات (2.10) و(2.11) بمعادلات أويلرالتفاضلية للسوائل الساكنة (*Euler's Equations*) التي وضعها عام (1755).

- مكاملة المعادلات التفاضلية للسوائل الساكنة:

بضرب معادلات أويلر الأولى بـ (dx) والثانية بـ (dy) والثالثة بـ (dz) وجمعها نحصل على المعادلة التالية:

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz - \frac{1}{\rho} \cdot (\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz) = 0 \qquad (2.12)$$

وبما أن الضغط في نقطة ما تابع فقط لإحداثيات تلك النقطة:

$$p = f(x, y, z) \qquad (2.13)$$

إن الحدود الأخيرة من المعادلة (2.12) والموجودة داخل قوسين هي عبارة عن التفاضل التام للضغط وبالتالي فهي تساوي (dp).
أي أن المعادلة (2.12) تأخذ الشكل:

$$dp = \rho \cdot (f_x dx + f_y dy + f_z dz) \qquad (2.14)$$

وبناء عليه يمكن القول بأنه طالما أن القسم الأيسر من المعادلة (2.14) يعبر عن تفاضل تام للضغط فإن القسم الأيمن منها، مع الأخذ بعين الاعتبار أن $(\rho = const)$، يجب أن يعبر أيضاً عن تفاضل تام لمتحول ما (du) يتعلق بالإحداثيات حيث يمكن كتابة المعادلة (2.14) على الشكل التالي:

$$dp = \rho \cdot du \qquad (2.15)$$

حيث إنَّ:

$$du = f_x dx + f_y dy + f_z dz \qquad (2.16)$$

ومن جهة أخرى يمكن كتابة التفاضل التام (du) كمجموع للتفاضلات الجزئية:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \qquad (2.17)$$

بمقارنة المعادلتين (2.16) و(2.17)، ينتج:

$$f_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad f_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad ; f_z = \frac{\partial u}{\partial z} \qquad (2.18)$$

بما أن (u) هو تابع فقط للإحداثيات وأن مشتقاته الجزئية بالنسبة للإحداثيات تعطي المركبات المناسبة (f_x، f_y، f_z) للقوة الحجمية بالنسبة لواحدة الكتلة فإن (u) يعتبر تابعاً كمونياً، وبالتالي فإن القوة الحجمية التي تحقق الشرط (2.18) تعتبر قوة تتصف بخاصية الكمون (كمونية).

وبناءً على ماسبق يمكن صياغة النتيجة التالية: "تكون السوائل المتجانسة $\rho = const$ في حالة سكون فقط عندما تقع تحت تأثير قوى كمونية".

بمكاملة المعادلة (2.15) تنتج المعادلة التالية:

$$p = \rho \cdot u + C \qquad (2.19)$$

حيث C ثابت التكامل، ومن أجل تعيين قيمته تختار نقطة ما تكون معلومةً عندها قيم كل من (p) و(u).

$$p = p_o; \quad u = u_o \qquad (2.20)$$

عندئذ تأخذ المعادلة (2.19) بالنسبة لهذه النقطة الشكل:

$$p_o = \rho \cdot u_o + C \qquad (2.21)$$

ومنه:

$$C = p_o - \rho \cdot u_o \qquad (2.22)$$

بتعويض المعادلة (2.22) في (2.19) نحصل على:

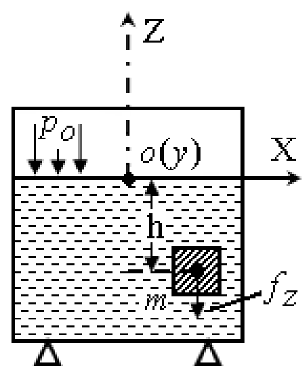
$$p = p_o + \rho \cdot (u - u_o) \qquad (2.23)$$

وعملياً، تعبر المعادلة (2.23) عن الضغط في نقطة ما من سائل متجانس غير قابل للإنضغاط ($\rho = const$) وذلك عندما تؤثر على السائل قوى حجمية كمونية.

2.4- تحديد قيمة الضغط الهيدروستاتيكي داخل مائع متوازن يخضع فقط لقوة الثقالة (*Gravitational Force*):

2.4.1- حالة سائل متجانس (*Homogenous Liquid*):

نفرض وجود سائل في وعاء مغلق (شكل (2.7))، ويرمز للضغط الخارجي الذي يؤثر على سطح السائل بالرمز (p_o). لتكن النقطة المادية (m) داخل السائل وتبتعد عن سطحه الحر بمسافة (h).



الشكل (2.7)، تعيين الضغط الهيدروستاتيكي لسائل تحت تأثير الجاذبية الأرضية.

نقتطع حول النقطة (m) واحدة الكتلة من السائل المدروس التي تخضع لها القوة الحجمية (F).

وطالما أن القوى الحجمية المؤثرة على السائل تتمثل فقط بقوة الجاذبية الأرضية يكون:

$$f_x = 0 \;\; ; \;\; f_y = 0 \;\; ; \;\; f_z = -g \qquad (2.24)$$

حيث إنَّ:

g : تسارع الجاذبية الأرضية.

f_x ، f_y ، f_z : على التوالي مساقط القوة (F) على المحاور x, y, z .

$f_z = -(1 \cdot g)$ حيث الكتلة المدروسة هي واحدة الكتلة.

بالتعويض في المعادلة (2.16) ينتج :

$$du = f_x dx + f_y dy + f_z dz = -g dz \qquad (2.25)$$

بتعويض المعادلة (2.25) في المعادلة (2.15) نحصل على المعادلة التالية:

$$dp = -\rho \cdot g dz \qquad (2.26)$$

بمكاملة العلاقة السابقة ينتج:

$$p = -\rho \cdot g z + C \qquad (2.27)$$

$$p = -\gamma \cdot z + C \qquad (2.28)$$

حيث C : ثابت التكامل، ومن أجل تعيين قيمته نأخذ نقطة على سطح السائل حيث:

$$p = p_o ; \qquad z = 0$$

وبتعويض هذه الشروط في المعادلة (2.27)، يكون:

$$C = p_o$$

عندئذ تأخذ المعادلة (2.28) الشكل التالي:

$$p = p_o - \gamma \cdot z \qquad (2.29)$$

ولو رمز لعمق النقطة (m) عن السطح الحر للسائل بالرمز ($h = -z$) لأمكن كتابة المعادلة (2.29) على الشكل الذي يعرف باسم المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية (*Hydrostatic Basic Equation*):

$$p = p_o + \gamma \cdot h \qquad (2.30)$$

حيث إنَّ:

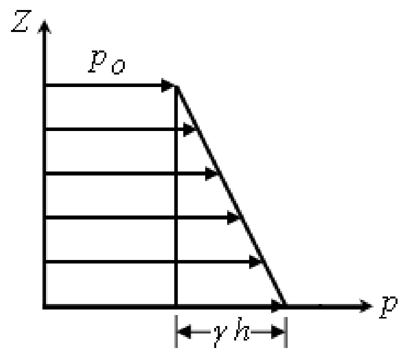
p : الضغط المطلق (*Absolute Pressure*) في النقطة المدروسة.

p_o : الضغط الخارجي.

إن مناقشة المعادلة (2.30) تقود إلى النتائج الهامة التالية:

1. إن لجميع النقاط ذات العمق الواحد ضغوطاً متساوية، وتشكل هذه النقاط مستويات أفقية أو سطوحاً يطلق عليها اسم سطوح الضغوط المتساوية (*Isobars*).
2. في سائل متجانس يزداد الضغط خطياً مع ازدياد العمق بمقدار (γ) لكل واحدة طول (الشكل 2.8).

وهذه النتائج لاتتعلق بالشكل الهندسي للخزان الذي يحتوي السائل وبالتالي فإن قيمة الضغط في أية نقطة من الخزان تتعلق فقط بعمق هذه النقطة.



الشكل (2.8)، مخطط توزع الضغط شاقولياً في سائل ساكن ومتجانس.

في العلاقة (2.30) يمكن تسمية القيمة ($p_B = \gamma \cdot h$) بالضغط الزائد أو ضغط المقياس أوبالضغط الوزني لأنه يعبر عن وزن السائل نفسه وبالتالي يمكن صياغة النتيجة التالية: " الضغط المطلق هو مجموع الضغط الخارجي مع الضغط الوزني".

في حالة كون الوعاء مفتوحاً يكون:

$$p_o = p_a$$

حيث إنَّ p_a الضغط الجوي (*Atmospheric Pressure*). عندئذ تأخذ المعادلة (2.30) الشكل التالي:

$$p = p_a + \gamma \cdot h \qquad (2.31)$$

تدعى قيمة الضغط التي تزيد عن الضغط الجوي في نقطة ما بالضغط الزائد $(p - p_a)$ -(*Over Pressure*)- كما يسمى أحياناً هذا الفرق بضغط المقياس (*Gauge Pressure*) الذي يبلغ حسب المعادلة السابقة:

$$p - p_a = \gamma \cdot h$$

وبهدف التمييز نرمز للضغط المطلق بالرمز (p_A) وللضغط الزائد بالرمز (p) ويكون لدينا:

$$p = p_A - p_a \qquad (2.32)$$

عندئذ تأخذ المعادلة (2.30) الشكل التالي:

a. من أجل الوعاء المغلق:

$$p_A = p_o + \gamma \cdot h = p_o + p_B = p_a + p$$

b. في حالة الوعاء المفتوح:

$$p_A = p_o + \gamma \cdot h = p_a + p_B = p_a + p$$

ويلاحظ أنه في حالة الوعاء المفتوح يتماثل مفهوم الضغط الزائد مع الضغط الوزني:

$$p = p_B = \gamma \cdot h$$

أما في الوعاء المغلق فإن الضغوط (p) و(p_B) لها قيم مختلفة:

$$p = p_B + (p_o - p_a)$$

حيث p_o يعبر هنا عن الضغط الخارجي المطلق.

2.4.2- حالة سائل غير متجانس (*Non-Homogenous Liquid*):

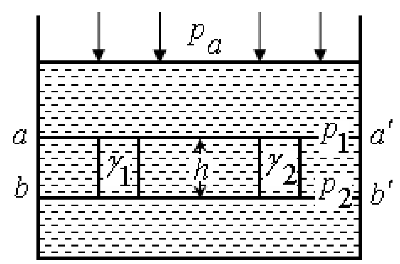
يتميز السائل غير المتجانس بأن وزنه النوعي غير ثابت، وبالإمكان أن نتصور أن تغير الوزن النوعي، الذي يمكن أن يكون مستمراً أي تابعاً للارتفاع $[\gamma = f(z)]$، أو فجائياً بمعنى أنه ينتقل فجأة من قيمة إلى أخرى وذلك بسبب تغير موضعي في درجة

حرارة السائل، أو بسبب حل أملاح بنسب مختلفة في مناطق مختلفة من السائل أو بسبب خلط سوائل غير متمازجة ذات أوزان نوعية مختلفة.

لقد دلّت التجارب على أنه إذا تواجدت عدة سوائل غير متمازجة (*Immiscible Liquids*)، أوزانها النوعية مختلفة في إناء واحد، فإنها تتوضع فوق بعضها البعض في حالة السكون بشكل طبقات تفصلها سطوح أفقية وتكون طبقة السائل الأخف في الأعلى والأثقل في الأسفل، وحتى لو غيرنا هذا التوضع بخلطها مثلاً، فإنها تعود إليه إذا تركت ساكنة. إذاً فإن توضع الطبقات بهذا الشكل يدل على توازنها المستقر.

ولندرس شروط التوازن المستقر لسائل غير متجانس:

نقتطع من داخل سائل ساكن غير متجانس في خزان مفتوح من الأعلى (الشكل 2.9)، إسطوانة صغيرة محورها أفقي ونطبق عليها شروط التوازن فنجد أنه في هذه الحالة أيضاً تشكل المستويات الأفقية سطوحاً للضغط الثابت فإذا كان لدينا من بين هذه المستويات المستوي ($a-a'$) الذي يتميز بالضغط (p_1) والمستوي ($b-b'$) الذي يبعد عن المستوي الأول بمقدار (h) وبحيث يكون الضغط عنده (p_2).



الشكل (2.9)، شروط التوازن المستقر للسوائل غير المتجانسة.

نقتطع إسطوانتين صغيرتين متجاورتين ومحصورين بين المستويين $a-a'$ ، $b-b'$ بحيث يكون محورهما شاقولياً وارتفاع كل منهما (h) صغيراً بحيث يمكن اعتبار الوزن النوعي للإسطوانة الأولى (γ_1) والثانية (γ_2) ثابتين.

نطبق شرط التوازن على الإسطوانتين فينتج حسب المعادلة الهيدروستاتيكية:

$$p_2 - p_1 = \gamma_1 \cdot h$$

$$p_2 - p_1 = \gamma_2 \cdot h$$

وينتج عن ذلك أن $(\gamma_1 = \gamma_2)$، وهذا يعني أن الوزن النوعي للإسطوانتين يجب أن يكون متساوياً وإلا فإن السائل لن يكون في حالة توازن مستقر وبالتالي سوف يبدأ في الحركة، وهذه النتيجة تبقى صحيحة في الحالة التي يصبح فيها عدد الإسطوانات المتجاورة لانهائياً وارتفاعها المشترك صغير جداً $(h \to 0)$ وبالتالي ينطبق المستوي الأفقي $(a-a')$ على المستوي $(b-b')$ وتكون النتيجة التالية: " يكون سائل ثقيل غير متجانس في حالة توازن مستقر عندما يكون الضغط في كل مستو أفقي ثابتاً $(p = const)$ والوزن النوعي ثابتاً $(\gamma = const)$". وتفسر هذه النتيجة سبب كون السطح الفاصل بين سائلين غير متمازجين أفقياً وأنه في حالة التوازن المستقر يتوضع السائل الأثقل في الأسفل لكي يكون مركز الثقل الكلي أخفض مايمكن.

ولحساب توزع الضغط في مثل هذه السوائل نفترض وجود وعاء مفتوح من الأعلى ويحتوي على عدة سوائل غير متمازجة أوزانها النوعية مختلفة $(\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 ..... < \gamma_n)$ وتتوضع بحسب أوزانها مشكلة سماكات (طبقات) مختلفة $(h_1, h_2, h_2, ... h_n)$.

ينتج حساب الضغط عند السطح الفاصل الأول من تطبيق المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية:

$$p_1 = p_a + \gamma_1 \cdot h_1$$

وعند السطح الفاصل الثاني:

$$p_2 = p_1 + \gamma_2 \cdot h_2 = p_a + \gamma_1 \cdot h_1 + \gamma_2 \cdot h_2$$

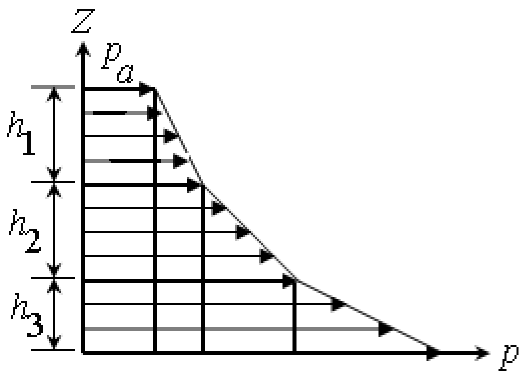
وعند السطح الفاصل n يكون:

$$p_n = p_a + \gamma_1 \cdot h_1 + \gamma_2 \cdot h_2 + ... + \gamma_n \cdot h_n$$

أو

$$p_n = p_a + \sum_{i=1}^{i=n} \gamma_i \cdot h_i \qquad (2.33)$$

وبسبب كون توزع الضغط خطياً في الطبقة الواحدة فإن مخطط توزع الضغط حسب المعادلة السابقة يمثل منحنياً منكسراً مؤلفاً من قطع مستقيمة- انظر الشكل (2.10).



الشكل (2.10)، مخطط توزع الضغط في ثلاثة سوائل غير متمازجة وأوزانها النوعية مختلفة.